Gewone Differentiaalvergelijkingen

Uitwerking oefententamen. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd: alleen "ja", "nee" of "42" volstaat niet en levert dus ook geen punten op. Het gebruik van rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.

Het tentamen bestaat uit zes opgaven. De puntenverdeling staat vermeld op de achterzijde.

Opgave 1. *Bereken de oplossing van het volgende beginwaardeprobleem:*

$$\frac{dy}{dx} = xe^x y, \qquad y(1) = -3.$$

Uitwerking. Dit is een vergelijking met gescheiden variabelen (Walter §1.VII). Kruislings vermenigvuldigen en primitiveren geeft

$$\int \frac{dy}{y} = \int xe^x dx \quad \Longrightarrow \quad \log|y| = (x-1)e^x + C.$$

Van beide kanten de e-macht nemen geeft

$$y = Ke^{(x-1)e^x}, \quad K = \pm e^C.$$

De beginvoorwaarde $y(1) = -3$ geeft $K = -3$.

Opgave 2. *Beschouw de vergelijking:*

$$y^2 + xy + 1 + (x^2 + xy + 1)\frac{dy}{dx}.$$

(a) *Toon aan dat de vergelijking* niet *exact is.*

(b) *Bereken de algemene oplossing in impliciete vorm. Aanwijzing: bepaal een integrerende factor van de vorm $M(x, y) = \phi(xy)$.*

Uitwerking.

(a) In het algemeen geldt (Walter §3.II):

$$a(x, y) + b(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \text{ is exact} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}.$$

We hebben

$$a(x, y) = y^2 + xy + 1 \quad \text{en} \quad b(x, y) = x^2 + xy + 1.$$

Hieruit volgt

$$\frac{\partial a}{\partial y} = 2y + x, \quad \frac{\partial b}{\partial x} = 2x + y \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial a}{\partial y} \neq \frac{\partial b}{\partial x},$$

hetgeen betekent dat de gegeven vergelijking *niet* exact is.

(b) Definieer nu

$$\tilde{a}(x,y) = (y^2 + xy + 1)\phi(xy) \quad \text{en} \quad \tilde{b}(x,y) = (x^2 + xy + 1)\phi(xy).$$

Differentiëren geeft

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{a}}{\partial y} &= (2y + x)\phi(xy) + (y^2 + xy + 1)x\phi'(xy),\\ \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x} &= (2x + y)\phi(xy) + (x^2 + xy + 1)y\phi'(xy).\end{aligned}$$

De functie $\phi(xy)$ is een integrerende factor als

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{a}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x} \quad &\Longleftrightarrow \quad (xy^2 + x^2y + x)\phi' + (2y + x)\phi = (x^2y + xy^2 + y)\phi' + (2x + y)\phi\\ &\Longleftrightarrow \quad x\phi' + (2y + x)\phi = y\phi' + (2x + y)\phi\\ &\Longleftrightarrow \quad (x - y)\phi' = (x - y)\phi\\ &\Longleftrightarrow \quad \phi' = \phi.\end{aligned}$$

Dus een integrerende factor wordt gegeven door $\phi(xy) = e^{xy}$. De impliciete kromme $f(x,y) = c$ is een oplossing van de vergelijking als

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \tilde{a}(x,y) \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \tilde{b}(x,y). \tag{1}$$

Primitiveren naar x geeft

$$f(x,y) = \int \tilde{a}(x,y)dx = \int y^2e^{xy} + xye^{xy} + e^{xy}dx = ye^{xy} + xe^{xy} + g(y).$$

Differentiëren naar y geeft

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + x^2e^{xy} + g'(y).$$

Kennelijk moet $g(y)$ een constante functie zijn om aan de tweede vergelijking in (1) te voldoen. De oplossing van de differentiaalvergelijking wordt dan

$$ye^{xy} + xe^{xy} = c.$$

Opgave 3. *Beschouw de* 3×3 *matrix*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Bereken een fundamentaalmatrix voor het stelsel $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}$.

Uitwerking. De matrix $Y(t) = e^{At}$ is een fundamentaalmatrix (Walter §18). Het is in dit geval *niet* nodig om de Jordan normaalvorm van A te berekenen! Merk op dat $A = D + N$ waarbij

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uit $DN = ND$ volgt dat $e^{At} = e^{Dt}e^{Nt}$. Omdat D een diagonaalmatrix is, geldt

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}.$$

Omdat $N^k = 0$ voor alle $k \geq 2$ volgt uit de machtreeks definitie dat

$$e^{Nt} = I + Nt = \begin{bmatrix} 1 & 3t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Een fundamentaalmatrix wordt dus gegeven door

$$Y(t) = e^{At} = e^{Dt}e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 3te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}.$$

Opgave 4. *Bepaal de algemene oplossing van*

$$u''' - u'' + u' - u = 4 \sin x.$$

Uitwerking. Dit is een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten (Walter §20). Begin met het oplossen van de homogene vergelijking

$$u''' - u'' + u' - u = 0.$$

Substitutie van $u(x) = e^{\lambda x}$ geeft de karakteristieke vergelijking

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0.$$

De nulpunten zijn $\lambda = 1$ en $\lambda = \pm i$ dus de algemene oplossing in complexe vorm wordt gegeven door

$$u(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{ix} + c_3 e^{-ix}.$$

De oplossing in reële vorm luidt

$$u(x) = d_1 e^{x} + d_2 \cos x + d_3 \sin x.$$

Als particuliere oplossing voor de inhomogene vergelijking proberen we

$$\begin{aligned}
u(x) &= Ax \cos x + Bx \sin x, \\
u'(x) &= (A + Bx) \cos x + (B - Ax) \sin x, \\
u''(x) &= (2B - Ax) \cos x + (-2A - Bx) \sin x, \\
u'''(x) &= (-3A - Bx) \cos x + (-3B + Ax) \sin x.
\end{aligned}$$

Invullen in de inhomogene vergelijking geeft

$$(-2A - 2B)\cos x + (-2B + 2A)\sin x = 4\sin x.$$

Voor de coëfficiënten moet dus gelden

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

De oplossing is $A = 1$ en $B = -1$. De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking is

$$u(x) = d_1 e^x + d_2 \cos x + d_3 \sin x + x\cos x - x\sin x.$$

Opgave 5. *Zij $C([0,1])$ de ruimte van alle continue functies op het interval $[0,1]$ voorzien van de norm*

$$\|y\| = \sup_{x\in[0,1]} |y(x)|.$$

Beschouw de integraaloperator

$$T : C([0,1]) \to C([0,1]), \qquad (Ty)(x) = 1 + \int_0^x \frac{ty(t)}{t^2+1} dt.$$

(a) *Bewijs dat T voldoet aan de Lipschitz voorwaarde*

$$\|Ty - Tz\| \leq \tfrac{1}{2}\log(2)\|y - z\|$$

voor alle $y, z \in C([0,1])$.

(b) *Bewijs dat het beginwaardeprobleem*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+1}, \quad y(0) = 1,$$

een unieke oplossing heeft in $C([0,1])$. Je mag hierbij zonder bewijs gebruiken dat de ruimte $C([0,1])$ met bovenstaande norm volledig is.

Uitwerking.

(a) Uit de driehoeksongelijkheid voor integralen volgt

$$|(Ty)(x) - (Tz)(x)| = \left| \int_0^x \frac{t}{t^2+1}(y(t) - z(t))dt \right| \leq \int_0^x \frac{t}{t^2+1}|y(t) - z(t)|dt.$$

Omdat voor alle $t \in [0,1]$ geldt dat

$$|y(t) - z(t)| \leq \|y - z\|$$

volgt hieruit dat

$$|(Ty)(x) - (Tz)(x)| \leq \|y - z\| \int_0^x \frac{t}{t^2+1} dt.$$

Verder geldt voor alle $x \in [0,1]$ dat

$$\int_0^x \frac{t}{t^2+1} dt = \tfrac{1}{2}\log(x^2+1) \leq \tfrac{1}{2}\log(2).$$

Voor alle $x \in [0,1]$ geldt de ongelijkheid

$$|(Ty)(x) - (Tz)(x)| \leq \tfrac{1}{2}\log(2)\|y - z\|.$$

Door het supremum over het interval $[0,1]$ te nemen, krijgen we de gevraagde ongelijkheid.

(b) De functie $y \in C([0,1])$ is een oplossing van het beginwaardeprobleem dan en slechts dan als geldt dat $Ty = y$. Uit onderdeel (a) volgt dat $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ een contractie is, want $\frac{1}{2}\log(2) < 1$. Omdat de ruimte $C([0,1])$ volledig is met betrekking tot de gegeven norm, volgt uit de contractiestelling van Banach (Walter §5.IX) dat er een unieke functie $y \in C([0,1])$ bestaat zodat $Ty = y$.

Opgave 6. *Bereken de Greense functie* $\Gamma(x,\xi)$ *voor het semi-homogene randwaardeprobleem*

$$u'' = f(x), \qquad u'(0) = 0, \qquad u(1) = 0.$$

Uitwerking. In het algemeen wordt de Greense functie gegeven door de formule

$$\Gamma(x,\xi) = \frac{1}{W(\xi)p(\xi)} \begin{cases} u_1(\xi)u_2(x) & 0 \le \xi \le x \le 1, \\ u_1(x)u_2(\xi) & 0 \le x \le \xi \le 1, \end{cases}$$

waarbij u_1 en u_2 oplossingen van de homogene vergelijking zijn die aan respectievelijk de linker en de rechter randvoorwaarde voldoen (Walter §26).

De oplossing van de homogene vergelijking $u'' = 0$ is $u(x) = c_1 x + c_2$. De oplossing $u_1(x) = 1$ voldoet aan de randvoorwaarde $u'(0) = 0$ en de oplossing $u_2(x) = x - 1$ voldoet aan de randvoorwaarde $u(1) = 0$. De Wronskiaan van deze oplossingen is

$$W = u_1 u_2' - u_1' u_2 = 1.$$

De Greense functie van het semi-homogene randwaardeprobleem wordt dan

$$\Gamma(x,\xi) = \begin{cases} x - 1 & 0 \le \xi \le x \le 1, \\ \xi - 1 & 0 \le x \le \xi \le 1. \end{cases}$$

Normering. Voor dit tentamen zijn in totaal 36 punten te behalen. Als p het aantal punten is, dan wordt het eindcijfer berekend met de formule

$$C = 1 + \frac{p}{4}.$$

Voor de vraagstukken kunnen de volgende punten worden behaald:

	Opg. 1	Opg. 2	Opg. 3	Opg. 4	Opg. 5	Opg. 6
(a)	6	2	6	6	4	4
(b)		4			4	